**Tema 1.4. Probabilidad Condicional.**

**Motivación del tema.**  Un buen ejemplo de qué es la probabilidad condicional lo constituyen los análisis del comercio de las commodities (materias primas). Dado que gran parte de los factores involucrados en la estimación de la producción o precio son azarosos (vientos, humedad ambiental, exposición solar, mano de obra real, condiciones económicas y financieras locales, avatares políticos regionales, entre otros), la teoría de la probabilidad resulta de gran importancia, ya que intenta ajustar la probabilidad sobre la producción o precio de un producto dado que vamos conociendo cómo van cambiando esos factores que intervienen en la producción o precio del producto. Por ejemplo, si es el evento de que el precio del petróleo disminuya y es el evento de que López Obrador gane las elecciones entonces podríamos estar interesados en calcular la probabilidad condicional , que se lee como “la probabilidad de que el precio del petróleo disminuya dado que López Obrador gana las elecciones presidenciales.

La noción de probabilidad condicional permite reevaluar la probabilidad de un evento ante mayor información, es decir, cuando se sabe que otro evento ha ocurrido. La probabilidad , léase la probabilidad de que el evento ocurra dado que el evento ocurrio, es una actualización de la de con base en que ha sucedido el evento . Supongamos que lanzamos 2 dados y como sabemos el espacio muestral es

Si tomamos el evento “la suma de las caras es mayor o igual a 5” entonces

y su probabilidad es

Ahora supongamos que queremos calcular otra vez la probabilidad de , pero suponiendo que el evento “la suma de las caras es menor o igual a 5” , es decir,

ya sucedió, entonces se toma como espacio muestral a y tenemos

Es fácil darse cuenta que

**Definición 1.** Suponga que es un evento en un espacio muestral con . La probabilidad de que ocurra un evento una vez que ha ocurrido o, en otras palabras, la probabilidad condicional de dado , escrita , se define como:

P() = (1)

Como se ilustra en el diagrama de Venn en la Fig. 1 P() mide, en cierto sentido, la probabilidad relativa de A con respecto al espacio muestral reducido E.

Fig. 1

**Teorema 1.** Supongamos que es un espacio equiprobable y y son eventos. Entonces

P() == (2)

**Demostración.**

**Ejemplo 1.** Se lanza un par de dados equilibrados. Encuentre la probabilidad de que uno de los dados sea 2 si la suma es 6, es decir, encuentre P(), donde

y

**Solución.** El evento está formado por

Dos de ellos y , pertenecen a, es decir, ={(2,4), (4,2)}. Por el teorema 1, = . Por otra parte, está formado por 11 elementos, específicamente:

y está conformada por 36 elementos, por tanto

**Ejemplo 2.** Supongamos que una pareja tiene 2 hijos. El espacio muestral para el sexo de los hijos es , donde el espacio es equiprobable, es decir, una probabilidad de para cada resultado. Encuentre la probabilidad de que ambos hijos sean niños si se sabe que: al menos uno de los hijos es niño. El hijo mayor es un niño.

**Solución.**  Aquí el espacio muestral reducido a tres elementos donde . Aquí el espacio muestral reducido a dos elementos de donde

**Ejemplo 3.** En un experimento para estudiar la relación entre la hipertensión y el hábito de fumar, se reunieron los siguientes datos de 180 personas

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | No Fumadores | Fumadores Moderado | Fumadores Empedernido |
| Hipertenso | 21 | 36 | 30 |
| No Hipertenso | 48 | 26 | 19 |

Si se selecciona aleatoriamente a una persona, encuentre la probabilidad de que la persona (a) padezca hipertensión, dado que es un fumador empedernido, (b) sea un no fumador, dado que no padece hipertensión.

**Solución.** (a) Sean los eventos cuando la persona padece hipertensión y cuando la persona es un fumador empedernido entonces buscamos

(b) Sea cuando una persona no fuma, entonces nos piden

**Ejemplo 4.** Un estudiante contesta una pregunta que ofrece cuatro soluciones posibles en un examen de opción múltiple. Suponga que la probabilidad de que el estudiante sepa la respuesta es de 0.8 y la probabilidad de que tenga que contestar al azar es de 0.2. Suponga además que la probabilidad de seleccionar la respuesta correcta al azar es 0.25. Si el estudiante contesta correctamente la pregunta, ¿Cuál es la probabilidad de que realmente sepa la respuesta correcta?

**Solución.** Sea el evento cuando el estudiante sabe la respuesta entonces

Sea C el evento de que el estudiante contesto correctamente, sin importar si es al azar o sabiéndola y el evento de que el estudiante contesto al azar. Sabemos que tenemos un 20% de probabilidades de contestar una pregunta al azar y . Además la probabilidad de contestar correctamente dado que se contestó al azar es . Para contestar la pregunta vamos a emplear la fórmula

Como contestar correctamente se puede hacer porque ya sea que sepamos la respuesta correcta o porque contestamos correctamente al azar, entonces el denominador lo calculamos como:

Además como la probabilidad de que contestemos correctamente dado que sabe la respuesta es 1, es decir, , entonces

**Ejemplo 4.** Cinco líneas de producción en una operación manufacturera producen un fusible eléctrico, los fusibles son caros, son bastante confiables, y se envían a los distribuidores en lotes de 100 unidades, la mayoría de los compradores prueba solamente un pequeño número de los fusibles antes de decir si aceptan o rechazan los lotes de fusibles que llegan ya que la prueba es destructiva.

Las cinco líneas producen fusibles a la misma velocidad y normalmente producen solamente 2% de fusibles defectuosas, que se distribuyen aleatoriamente en el proceso producción. Desafortunadamente la línea 1 sufrió una falla mecánica y produjo 5% de defectuosos en el mes de marzo, el productor se enteró de esta situación después de haber enviado los fusibles. Un cliente adquirió un lote producido en el mes de marzo y probó 3 fusibles; uno era defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que el lote haya salido de la línea 1? ¿Cuál es la probabilidad de que el lote haya salido de una de las otras cuatro líneas?

**Solución.** Sea la probabilidad de que un fusible haya salido de la línea , entonces como las 5 líneas producen los fusibles a la misma velocidad:

Ahora denotemos con el evento en que de tres fusibles uno sea defectuoso entonces está formado por los tres casos

Para contestar la primera pregunta debemos calcular

Para calcular el numerador utilizamos la siguiente fórmula de inversión de la probabilidad condicional

Observe como se intercambian y en las dos últimas fórmulas. Ahora calculamos como sigue: como en el mes de marzo la línea 1 produjo 5% de defectuosos y 95% de buenos entonces la probabilidad de obtener un fusible defectuoso y dos no, dado que los produjo la línea 1 es

Ahora para calcular el denominador observamos que o salen de o de las otras cuatro líneas que las denotamos por entonces

y calculamos cada sumando como sigue:

El otro sumando es la probabilidad de obtener un fusible defectuoso y dos no de las otras líneas de producción y es

Así la probabilidad de obtener un fusible defectuoso y dos no es

En consecuencia la probabilidad de que la línea 1 haya producido tres fusibles en los que uno es defectuoso y dos no es

También la probabilidad de que las otras líneas hayan producido tres fusibles dado que uno es defectuoso y dos no es

**Ejercicios.**

1. En el último año en una escuela, en un grupo de 100 alumnos se encontró que 42 cursaron Matemáticas, 68 Sicología, 54 Historia, 22 Matemáticas e Historia, 25 Matemáticas y Sicología, 7 Historia pero no Matemáticas ni Sicología, 10 las tres materias y 8 ninguna de las tres. Si se selecciona un estudiante al azar, encuentre la probabilidad de que (a) una persona inscrita en Sicología haya estudiado las tres materias, (b) una persona que no se inscribió en Sicología haya tomado Historia y Matemáticas.

Solución: (a) 5/34, (b) 3/8.

1. La probabilidad de que un médico diagnostique correctamente una enfermedad es de 0.7. Dado que realice un diagnóstico incorrecto, la probabilidad de que el paciente levante una demanda es de 0.9. ¿Cuál es la probabilidad de que el médico realice un diagnóstico incorrecto y de que el paciente lo demande?

Solución: 0.27.

1. Demostrar que .
2. Demostrar que , si
3. Demostrar que .
4. Un estudio de la conducta después del tratamiento de un gran número de drogadictos, sugiere que la probabilidad de reincidencia dentro de los dos años siguientes al tratamiento podría depender de la educación del transgresor. Las proporciones del número total de casos que caen dentro de cuatro categorías de educación-reincidencia se presentan a continuación

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Educación | Reincide | No Reincide | Totales |
| 10 años o más | 0.1 | 0.3 | 0.4 |
| 9 años o menos | 0.27 | 0.33 | 0.6 |
| Totales | 0.37 | 0.43 | 1 |

Suponga que se selecciona un solo transgresor del programa de tratamiento. Defina los eventos

A: el transgresor tiene 10 años o más de educación

B: el transgresor reincide dentro del periodo de los dos años siguientes al tratamiento

Encuentre las probabilidades de los eventos:

1. A, (b) B, (c) , (d) , (e) , (f) , (g) , (h) del evento A, dado que ocurrió el evento B, (i) del evento B, dado que ocurrió el evento A.

Respuesta: (a) 0.4, (b) 0.37, (c) 0.1, (d) 0.67, (e) 0.60, (f) 0.33, (g) 0.90, (h) 0.27, (i) 0.25